PŘEDNÁŠKA

2

TEORIE HER - ÚVOD

Teorie her

- matematická teorie rozhodování dvou racionálních hráčů, kteří jsou na sobě závislí

- **Naznačuje, jak by se v takové situaci chovali racionální a informovaní hráči.**
- **Vychází ze situace, kdy každý hráč potřebuje ke svému rozhodnutí informaci o rozhodnutí ostatních hráčů.**

Teorie her

- Hráč na základě stabilních preferencí stanovuje cíle a volí si strategie k co možná nejefektivnějšímu dosažení těchto cílů.
- hráč je konfrontován s určitým počtem situací a dokáže si je seřadit podle svých preferencí od nejvýhodnější po nejméně výhodnou.
- *Pozn.: Toto **seřazení musí být úplné**, tj. musí pokrývat všechny situace, a **tranzitivní**, tj. pokud dá hráč přednost situaci A před situací B a situaci B před situací C, musí dát přednost situaci A před situací C.*

Užitková funkce

- Na základě preferencí situací je odvozena užitková funkce (*utility function*) hráče.
- Cílem hráče je potom maximalizace hodnoty užitkové funkce.

Hra

- Hra je dána
  - počtem hráčů,
  - počtem strategií každého hráče a
  - preferencemi každého hráče.
- Teorie her se snaží nalézt v každé hře bod rovnováhy, v němž hráči volí takové strategie, že žádný z nich nemá důvod svou strategii změnit za předpokladu, že nikdo z ostatních svou strategii nezmění.

- Dále uvažujeme nejjednodušší typ her, dvou hráčů, zapsané v maticovém tvaru.
- Př.

Rovnovážný bod

- Platí, že když se hráči ocitnou v rovnovážném bodě, žádný z nich nemá zájem měnit svou strategii za předpokladu, že druhý hráč svou strategii nemění.
- Jedná se o bod **Nashovy rovnováhy** (Nash equilibrium).
- Racionální hráči, kteří jsou navzájem informováni o strategiích a výplatách ostatních hráčů, zvolí právě strategie, které tvoří Nashovu rovnováhu.

  →lze (za předpokladu racionality a informovanosti hráčů) najít spolehlivou strategii hry.

Nashova rovnováha

- *Nashova rovnováha poskytuje tuto jistotu pouze ve hrách s nulovým součtem (zero-sum games). -- pro každou kombinaci strategií platí, že součet výplat se rovná nule.*
- *Jedná se o dokonale antagonistické hry.*

(Zisk jednoho hráče se rovná ztrátě druhého hráče.)

- V takových hrách postrádá smysl jakákoli komunikace či pokusy o dohodu mezi hráči.
- Ačkoli některé mezinárodní situace lze modelovat pomocí her s nulovým součtem, význam her s nenulovým součtem (non-zero-sum games) je nesrovnatelně větší.

Hry s nenulovým součtem

- antagonismus x možnosti spolupráce.
- otázka možnosti komunikace a dohody hráčů

- Hry s nenulovým součtem se proto dále dělí na:
  - kooperativní (cooperative games), kde spolu hráči mohou komunikovat a uzavírat závazné dohody týkající se volby strategií;
  - nekooperativní (non-cooperative games), kde závazné dohody možné nejsou a komunikace může, a nemusí existovat (Morrow, 1994, s. 75).

Historie

- Mezi první vědce, jejichž jména jsou spojená s teorií her, patří matematikové Blaise Pascal (1623--1662) a Pierre de Fermat (1607--1665)
  - Počátky teorie pravděpodobnosti, karetní hry
- První výskyt řešení hry ve smíšených strategiích
  - karetní hra, Jamese Waldegrava (1684--1741) (avšak nezobecněno, dále nepoužito)
- Zahrnutí teorie užitku do teorie her (nezbytné pro zavedení pojmu výplatní funkce, nebo-li ohodnocení výsledků různých situací).
  - První studie této teorie - esej D. Bernoulliho (1700-1782).

Historie

- rozvoj v době průmyslové revoluce a vzniku ekonomických modelů
  - Antoine Cournot (1801-1877) - popsal model doupolu, optimální chování dvou účastníků směřující k maximalizaci jejich zisků.

  (Doupol je trh, na kterém se dva výrobci snaží prodat jeden druh výrobků.)

  Cournot jako první navrhl koncepci racionálního chování používané při analýze střetu zájmů bez možnosti kooperace mezi účastníky konfliktní situace.

Historie

- Dalším mezníkem (svými přesně vymezenými pojmy a důkazem tzv. základní věty maticových her, což je matematické tvrzení také nazývané větou o minimaxu)
  - 1928 první práce amerického matematika Johna von Neumanna (1903-1957).
  - John von Neumann začal matematicky rozebírat záměrně vyvolané konfliktní situace při salónních hrách a spolu s Oscarem Morgensternem (1902-1977) si všiml shodné struktury konfliktních situací vznikajících při salónních hrách a při ekonomickém nebo vojenském rozhodování.
- V roce 1944 položili v knize ,,Teorie her a ekonomické chování" základ samostatné matematické teorii.

Historie

- Ve 2. pol. 20. stol. nastal prudký rozvoj teorie her
- Tato nová disciplína byla využita mimo jiné pro:
  - sestavování abstraktních ekonomických modelů,
  - modelů pro využití výrobních zdrojů,
  - v kybernetice pro optimální chování systémů,
  - v matematické statistice
  - aplikované matematice
  - ...

Novodobá historie

- John Forbes Nash (*1928)
  - řešení nekooperativních her s nekonstantním součtem a libovolným počtem hráčů a kooperativních her s nepřenosnou výhrou.
  - definice pojmu řešení v nekooperativních konfliktních situacích a objasnění vlastností těchto řešení .
  - Tato koncepce je nazývána Nashova rovnováha a je vhodná pro řešení konfliktů, kdy účastníci rozhodují zcela racionálně, mají úplnou informaci o strategických možnostech a preferencích všech ostatních účastníků.
  - Osudem Johna Forbese Nashe jr. inspirován film Čistá duše (A Beautiful Mind), 2001

Novodobá historie – Nobelovy ceny

- 1994 – Nobelova cena za ekonomii za výzkum teorie her - za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her profesoři ekonomie John Forbes Nash Jr., Reinhard Selten z univerzity v Bonnu a John Harsanyi z Berkeley.
- 2005 – Nobelova cena za ekonomii za aplikaci teorie her na problematiku konfliktního a koordinačního jednání, vysvětlení problematiky obchodních a cenových válek a v poznání příčin, proč jsou některé skupiny úspěšnější při správě svých zdrojů než skupiny jiné – izraelský matematik Robert J. Aumann (*1930) a americký ekonom Thomas Schelling (*1921)

Typické situace (příklady)

Příklady využití teorie her

- evoluční strategie – jestřáb/hrdlička, obsadit/budovat hnízdo
- politické volby
- vojenské souboje
- aukce
- chování ekonomického trhu
- pojišťovnictví
- právo
- politologie
- zemědělství
- životní prostředí
- medicína
- psychologie
- sociologie
- atd.

Definice

- hra – konfliktní rozhodování (rozhodovací situace) s alespoň 2 účastníky se skalárním hodnocením výsledků (skalární hodnotící funkce)
- důsledky dílčího rozhodnutí jednoho z účastníků jsou ovlivněny rozhodnutími alespoň jednoho dalšího účastníka (nejhůře všech)

- DS=G=[I {1, ..., n}, X (x1, .., xn), F (f1, ...,fn)]
- I – množina hráčů
- xi – množina alternativ i-tého hráče (strategie i-tého hráče)
- fi(x) – skalární hodnotící funkce (výplatní funkce) – definována na kartézském součinu
- fi ....[x1 x x2 x....x xn]
- výplata ~ „bod hry“ – ve výši fi(x1, ..., xn)

- **Axiom: každý hráč maximalizuje svoji výhru**

- **Každý hráč má úplnou informaci o prostorech strategií protihráčů (zná pravidla hry)**

Pojmy

- konečná hra –konečný počet alternativ pro všechny hráče
- hra s konstantním součtem $\forall x_i \in X : \sum_{i \in I} f_i(\bar{x}) = K$
  - (to, o co se hraje, leží na stole)
- hra s nulovým součtem – pokud K=0
  - co jeden ztratí, druhý vyhraje
- autarktní systém – uzavřený, nevstupuje nic zvenčí
- nekoaliční hra – hra více než 2 účastníků, kteří nemají společné hodnotící funkce
- koaliční hra – účastníci hry se sdružují, mají společné hodnotící funkce
- Jednomaticová hra – lze zapsat jen jedinou výplatní funkcí (zisk jednoho=ztráta druhého) – dokonale antagonistická s nulovým součtem
- dvoumaticová hra – nelze zapsat jedinou výplatní funkcí

- dále se zabýváme pouze nekoaličními hrami
- (uvažujeme, že pokud se vytvoří koalice, tak je dost pevná a vystupuje jako jeden hráč; nesmí se měnit pravidla koalice)

- přípustný bod hráče i – taková volba strategie, že hráč i nemůže zvýšit svoji výhru změnou strategie (alternativní strategií) – jinak by porušil axiom o maximalizaci výhry

- Existuje v dané hře přípustný bod pro všechny hráče?
  - pokud ano, hra má řešení v ryzích strategiích
  - **pokud existuje přípustný bod pro všechny hráče, pak je to rovnovážný bod**

Strategicky ekvivalentní hry

- Hry, jež se liší pouze výplatními funkcemi jsou strategicky ekvivalentní
  - $G=[I, \{x_i\}, \{f_i(x)\}]$
  - $G'=[I, \{x_i\}, \{f_i'(x)\}]$
- tzn. ∃k>0 (takové kladné číslo k) a ∃ci ∈R (i∈I) (a takové reálné číslo c)

$$\forall x \in X : f_i'(x) = k \cdot f_i(x) + c_i$$

i=1, ..., N

  - buď se liší počátečním kapitálem hráče i (Ci) nebo měrnou jednotkou k
- u strategicky ekvivalentních her se účastníci chovají stejně

Strategicky ekvivalentní hry

- **Věta:**

  Každá nekoaliční hra s konstantním součtem je strategicky ekvivalentní hře s nulovým součtem.

Příklad

- antagonistická hra – hra 2 hráčů s konstantním (~nulovým) součtem
  - protikladné hodnotící funkce

$$f_1(x_1, x_2)=-f_2(x_1,x_2)$$

- Příklad

Optimální strategie

- Optimální strategie 1. hráče $X_0 \in X$ je taková, ke které existuje
- optimální strategie 2. hráče $Y_0 \in Y$ taková, že platí:

$$f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y) \text{ pro } \forall\ (x,y) \in (X \times Y)$$

- Ne vždy ale takového optimální řešení hry existuje

- Dolní cena hry $v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (f(x, y))$
  - minimální zaručená výhra 1. hráče
- Horní cena hry $v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (f(x, y))$
  - maximální zaručená prohra 2. hráče
- $v_1 \leq v_2$

Řešení hry

- Pokud $v_1=v_2$ –řešení hry (rovnovážný = sedlový bod výplatní funkce)

- Princip minimaxu
  - max min
  - min max

$$f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$$

Konečná antagonistická hra

- konečná antagonistická hra – „maticová hra“
- $G_A=[x,y,A]$
  - x[1, ...,m]
  - y[1, ...,n] - očíslované strategie hráčů
  - A – výplatní funkce

$$A = \{a_{ij}\}_m^n$$

$a_{ij}=f(i,j)$ $\quad i \in X;\ j \in Y$

- Příklady:

- A co s tím?

... Pokračování příště

Děkuji za pozornost!

Zdroje

- Hykšová M. Teorie her a optimální rozhodování – podklady k předmětu. FD ČVUT [http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/].
- Hamacková P. Minimaxové a smíšené strategie řešení maticových her. Diplomová práce. 2007. Masarykova univerzita v Brně [http://is.muni.cz/th/105801/pedf_m/petra.pdf].
- Drulák P. *Teorie her: matematika interaktivního rozhodování* [http://www.portal.cz/scripts/detail.php?id=2232].