PŘEDNÁŠKA

5

MULTIKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ – VEKTOROVÁ OPTIMALIZACE

Multikriteriální rozhodování

- racionální účastník, více hodnotících funkcí, snaží se optimalizovat všechna kritéria
- kritéria se mnohdy navzájem vylučují, dílčí funkce mohou být nesouměřitelné, apod.
- každodenní situace – porovnávání ceny, kvality, životnosti, atd.

- DS=(I={1}, X, $\underline{f}(\underline{x})$)
- $\underline{f}(\underline{x})=[f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}),\ldots f_r(\underline{x}),]$
- - rozhodovací situace s jedním racionálním účastníkem, množinou alternativ X a vektorem hodnotících funkcí

Multikriteriální rozhodování

- Možnosti řešení podle toho, jaké je množina alternativ
  - pokud množina alternativ X je zadaná implicitně – vektorová optimalizace
  - zadaná přímým výčtem (konečná množina) – komplexní hodnocení alternativ

Vektorová optimalizace

- hledám max $[\underline{f}_k(\underline{x}),: \underline{g}_i(\underline{x}) \leq 0;\ \underline{x} \in E_n]$
  - f_k – k-tá kriteriální funkce
  - g_i – i-tá reálná funkce omezujících podmínek

- pokud všechny $f_k(\underline{x})$ a $g_i(\underline{x})$ jsou lineární – vektorové lineární programování
- pak hledám $\max(C \cdot \underline{x} : \ \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0, \quad \underline{x} \in E_n)$
- C – matice typu (r,n) (n- počet kritérií)
- A – matice (m,n) (m- počet omezujících podmínek)
- b – vektor pravých stran

Kriteriální množina

- Definice:
- $\forall \underline{x}$ $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $\exists$ bod $\underline{f}$ $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ v E_n (kriteriální prostor) o souřadnicích $f_r = f_k(\underline{x})$ $k=1,\ldots,r$
- kriteriální množina F je množina bodů $\underline{f}$ přiřazená přípustným řešením $F = \{ \underline{f}(\underline{x}) : \underline{x} \in \chi \}$
  - vybírá jen ty alternativy, které vyhovují omezujícím podmínkám

Vektorová optimalizace

- postup:

  pokoušíme se najít ideální řešení

  $$(\underline{x} \in \chi \ : \ \underline{f}(x_0) \geq \underline{f}(\underline{x}) \ )$$

  - každá z funkcí f_k dosahuje maxima
- Najdeme **dílčí optima** podle všech kritérií nezávisle (s přihlédnutím k podmínkám)
  - dílčí optimální řešení – k-tá kriteriální funkce nabývá maxima
- výsledek: přípustná řešení $\underline{X}_k$ v nichž k-tá kriteriální funkce dosahuje maxima na X
  - získáme matici dílčích optim $F[f_{ij}]_r$
  - její prvky – hodnoty i-té kriteriální funkce pro j-té optimum

Dominace

- $\underline{x} \in E_n$, $\underline{y} \in E_n$
- řešení $\underline{x}$ je dominováno řešením $\underline{y}$, pokud $f_k(\underline{x}) \le f_k(\underline{y})$ pro $\forall k \in \{1, ..., r\}$

  a $f_k(\underline{x}) < f_k(\underline{y})$ pro alespoň jedno $k \in \{1, ..., r\}$
- To znamená, že y musí být lepší alespoň podle jednoho kritéria, přičemž podle žádného není horší.
- řešení, které není dominováno, nazýváme **efektivní (paretovsky nedominované) řešení**

- ideální alternativa
  - Každá z kriteriálních funkcí dosahuje svého maxima
- kompromisní alternativa
  - Hledané řešení

Rozdělení metod multikriteriálního rozhodování podle toho, v jakém stádiu vyžadují preferenční informaci

- nevyžadují – kompromisní programování
- vyžadují apriorně – metoda globální kriteriální funkce, lexikografická metoda, cílové programování
- postupné předávání preferenční informace – interaktivní metody
- dodatečná preferenční informace – parametrické programování

Metoda globální kriteriální funkce

- zavedu klobání kriteriální funkci g
  $\exists\ g(\underline{f}) = g(f_1, f_2, \dots, f_r)$
- maximum $(g(\underline{f})) = g(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_r(\underline{x}))$ je paretovsky optimální
- globální kriteriální funkce (GKF) je ve všech proměnných rostoucí
- GFK je vážený součet dílčích kriteriální funkcí

$$g(\bar{f}) = \sum_{k=1}^{r} v_k f_k(\bar{x}) = MAX$$

- z multikriteriálního hodnocení je hodnocení monokriteriální s kompozitní váhovou funkcí

Metoda globální kriteriální funkce

- váhy je možno zvolit
- pokud váhy neznám, je možné použít např. váhy

$$v_k = \frac{1}{f_{ok}}$$

  - kde $f_{ok}=f_k(x_{ok})$ - hodnotá k-té kriteriální funkce v k-tém dílčím optimu

$\Rightarrow$ hledám max ($\sum_{k=1}^{r} \frac{f_k(\bar{x})}{f_{ok}} : \bar{x} \in X$)

Lexikografická metoda (metoda postupné diktatury)

- dílčí kriteriální funkce musí být uspořádány podle důležitosti
  - naleznu optimum podle nejdůležitější kriteriální funkce – pokud je toto řešení jednoznačné → konec
  - pokud řešení není jednoznačné, vybírám z možných optim dle 1. kritéria pomocí 2. preferovaného kritéria
  - atd.

Lexikografická metoda - modifikace

- většinou již první kritérium dá jednoznačné optimum, proto se používá modifikace metody
- modifikace: předpokládám, že problém má řešení s relativně plochým extrémem
- připustím odchylku d1 od optimální hodnoty preferované kriteriální funkce o zvolenou hodnotu, to použiji jako další omezující podmínku
- hledám optimum podle druhé kriteriální funkce

  $$\max \left(f_k(\overline{x}) : \overline{x} \in X; f_q(\overline{x}) \geq f_q(\overline{x}_{oq}) - d_q; q = 1,\dots,k-1 \right)$$

  - d_q – uvolnění, zpravidla se udává v procentech

- modifikace 2: nezvolí se degradace optima o procenta, ale o nějakou hodnotu – stanovení přípustného minima dílčí kriteriální funkce

Cílové programování

- uživatel zadá cílové (žádané) hodnoty dílčích kriteriálních funkcí $\underline{f}(\underline{x})=\underline{z}$
- hledám min (vzdálenosti $d(\underline{f}, \underline{z})$: $\underline{f} \in F$)
  - F - kriteriální množina

- $d_1(\underline{f}, \underline{z})$ ... $\sum_{k=1}^{r} v_k (f_k - z_k)$
- d_2 Euklidovská vzdálenost
- d_∞ $\max_k v_k \left| f_k - z_k \right|$

Kompromisní programování

- Varianta cílového programování
- není třeba hodnoty zadávat, použijí se dílčí optima

→ minimalizace maximální relativní odchylky od ideálních hodnot

- Metrika $d_{\infty}(\bar{f}, \bar{z})$

  s vahami $v_k = \dfrac{1}{f_{ok}}$

Parametrické programování

- výsledná funkce je vážený součet dílčích kriteriálních funkcí
- de facto varianta metody globální kriteriální funkce, ale váhy jsou parametrem

$$\max \left(\sum_{k=1}^{r} t_k f_k(\bar{x}) : \bar{x} \in X; \sum_{k=1}^{r} t_k = 1, t_k \geq 0, k = 1,\ldots,r \right)$$

Děkuji za pozornost

Zdroje

- Hanuš, Píšek. Rozhodovací analýza
- Rozhodovací analýza příklady
- Dudorkin. Systémové inženýrství a rozhodování
- Chobot, Turnovcová. Modely rozhodování v konfliktných situáciách a za neurčitosti.